IRRATIONALITÄT — DER ANGELPUNKT MATHEMATISCHEN DENKENS

RUDOLF TASCHNER

Roman Schnabl mit tiefem Respekt und größter Wertschätzung gewidmet

INHALTSVERZEICHNIS

Lassen Sie mich — völlig unpädagogisch — nicht mit dem Einfachen, sondern mit dem Schwierigen beginnen: mit einem für die Mathematik typischen Irrationalitätsbeweis, der für den Schulunterricht wegen seines hohen Anspruchs wohl nur für sehr Begabte geeignet ist. Ich will begründen, warum die berühmte „Kreiszahl" π irrational ist.

1. DIE IRRATIONALITÄT VON π

1.1. Eine Vorbemerkung. Vor dem eigentlichen Beweis sei die folgende Tatsache in Erinnerung gerufen: Wenn n und $m \geq n$ irgendwelche natürliche Zahlen und c irgendeine ganze Zahl darstellen, dann gilt für das Monom $P(x) = cx^m$ die folgende Aussage: *Sowohl* $P(0)$ *als auch alle an Null ausgewerteten Ableitungen* $P'(0)$, $P''(0)$, $P'''(0)$, ..., $P^{(k)}(0)$, ... *sind durch* $n!$ *teilbar.*

Der Grund ist klar: Es sind

$$
\begin{aligned}
&P(x) = cx^m \\
&P'(x) = mcx^{m-1} \\
&P''(x) = m(m-1)\,cx^{m-2} \\
&P'''(x) = m(m-1)(m-2)\,cx^{m-3} \\
&\ldots \\
&P^{(k)}(x) = m(m-1)(m-2)\ldots(m-k+1)\,cx^{m-k} \\
&\ldots
\end{aligned}
$$

und, allein den Fall $k = m$ ausgenommen, alle $P^{(k)}(0) = 0$, also sicher durch $n!$ teilbar. Im Ausnahmefall $k = m$ ist $P^{(m)}(0) = m!c$, also wegen $m \geq n$ ebenfalls durch $n!$ teilbar.

Was für ein einzelnes Monom zutrifft, kann man sofort auf Polynome verallgemeinern: *Sind n irgendeine natürliche Zahl und*

$$p(x) = c_0x^j + c_1x^{j-1} + \ldots + c_{j-1}x + c_j$$

irgendein Polynom mit ganzzahligen Koeffizienten c_0, c_1, ..., c_{j-1}, c_j, dann trifft für die durch $P(x) = x^n p(x)$ gegebene Polynomfunktion P zu, daß sowohl $P(0)$ als auch alle an Null ausgewerteten Ableitungen $P'(0)$, $P''(0)$, $P'''(0)$, ..., $P^{(k)}(0)$, ... durch $n!$ teilbar sind. Denn die in $P(x)$ addierten Monome sind von der Gestalt cx^m mit einem ganzzahligen c sowie mit $m \geq n$, und auch die Summe von lauter durch $n!$ teilbaren Zahlen bleibt durch $n!$ teilbar.

1.2. **Beginn des Beweises: ein Polynom.** Nun nehmen wir an, die „Kreiszahl" π wäre rational. Es gäbe also positive ganze Zahlen a und b mit der Eigenschaft $\pi = a/b$, bzw. $b\pi = a$. Dann wäre, egal wie man die natürliche Zahl n festlegt,

$$P(x) = x^n(a - bx)^n$$

ein Polynom mit ganzzahligen Koeffizienten, welches man wegen $a - bx = b(\pi - x)$ auch in der Form

$$P(x) = b^n x^n (\pi - x)^n$$

schreiben kann. Ja es würde sogar noch mehr gelten: sowohl $P(0)$ als auch alle an Null ausgewerteten Ableitungen $P'(0)$, $P''(0)$, $P'''(0)$, ..., $P^{(k)}(0)$, ... wären durch $n!$ teilbar. Anders formuliert: Definiert man die Polynomfunktion f durch

$$f(x) = \frac{P(x)}{n!} = \frac{x^n(a-bx)^n}{n!} = \frac{b^n x^n (\pi - x)^n}{n!},$$

wären sowohl $f(0)$ als auch alle an Null ausgewerteten Ableitungen $f'(0)$, $f''(0)$, $f'''(0)$, ..., $f^{(k)}(0)$, ... ganze Zahlen.

Nun ist $P(\pi - x) = b^n(\pi - x)^n(\pi - (\pi - x))^n = b^n(\pi - x)^n x^n = P(x)$ und folglich

$$
\begin{aligned}
&f(\pi - x) = f(x) \\
&f'(\pi - x) = -f'(x) \\
&f''(\pi - x) = f''(x) \\
&\ldots
\end{aligned}
$$

allgemein $f^{(k)}(\pi - x) = (-1)^k f^{(k)}(x)$. Setzt man $x = 0$, erkennt man: es *wären sowohl $f(\pi)$ als auch alle an π ausgewerteten Ableitungen $f'(\pi)$, $f''(\pi)$, $f'''(\pi)$, ..., $f^{(k)}(\pi)$, ... ganze Zahlen.*

1.3. **Was eigentlich ist π?** Bisher wurde völlig unberücksichtigt gelassen, daß es sich bei π um die „Kreiszahl" handelt. Wie kann man diese kennzeichnen? Die aus der Sicht der höheren Mathematik einfachste Definition lautet: *π ist die kleinste positive Nullstelle des Sinus.* Mit anderen Worten: für $0 < x < \pi$ stimmt stets $\sin x > 0$, aber es ist $\sin \pi = 0$. Nun könnte man dieser Kennzeichnung entgegnen: wenn man Winkel im Gradmaß mißt, ist $\pi = 180°$, und 180 ist alles andere als eine irrationale Größe, 180 ist sogar eine ganze Zahl! Also ist außerdem zu berücksichtigen, daß die Winkel, welche in den Sinus eingesetzt werden, im *Bogenmaß* angegeben sind — das Bogenmaß spiegelt nämlich die Tatsache wieder, daß ein Kreis mit Radius 1 den Wert 2π als Umfang besitzt. Welches Charakteristikum aber ist für das Bogenmaß als Winkelmaß kennzeichnend? Grob gesprochen: die Tatsache, daß die Kreissehne eines Winkels fast mit seinem Bogenmaß übereinstimmt — und dies umso genauer, je kleiner der gewählte Winkel ist. In Formeln gefaßt: $\sin \alpha \approx \alpha$, wobei das $\approx$-Zeichen bei $\alpha \to 0$ in das $=$-Zeichen übergeht. Exakter formuliert: Man mißt Winkel α genau dann im Bogenmaß, wenn

$$\lim_{\alpha \to 0} \frac{\sin \alpha}{\alpha} = 1$$

zutrifft. Eben diese Grenzwertrelation ist dafür maßgeblich, daß Sinus differenziert den Cosinus ergibt, denn es ist

$$\sin' x = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin (x + \Delta x) - \sin x}{\Delta x} =$$

bei $\alpha = \Delta x / 2$ und unter Beachtung der bekannten Summensätze[1]:

$$\begin{aligned} &= \lim_{\alpha \to 0} \frac{\sin (x + 2\alpha) - \sin x}{2\alpha} = \lim_{\alpha \to 0} \frac{2 \cos (x + \alpha) \sin \alpha}{2\alpha} = \\ &= \lim_{\alpha \to 0} \cos (x + \alpha) \cdot \lim_{\alpha \to 0} \frac{\sin \alpha}{\alpha} = \cos x \cdot 1 = \cos x \, . \end{aligned}$$

1.4. **Fortsetzung des Beweises: ein Integral.** Nun kommt es darauf an, diese Kennzeichnung von π in die Argumentation einfließen zu lassen. Es zeigt sich, daß dies mit der Ermittlung des Integrals

$$\int_0^\pi f(x) \sin x \cdot dx$$

gelingt. Um das Ergebnis, das direkt durch eine sehr mühsame partielle Integration ermittelt werden könnte, gleich vorwegzunehmen, führt man das aus dem Polynom $f(x)$ gebildete Polynom

$$F(x) = f(x) - f''(x) + f''''(x) - \ldots + (-1)^{n-1} f^{(2n-2)}(x) + (-1)^n f^{(2n)}(x)$$

ein, welches zweimal differenziert

$$F''(x) = f''(x) - f''''(x) + \ldots + (-1)^{n-1} f^{(2n)}(x) + 0$$

[1] unter Beachtung von $\sin(x + 2\alpha) = \sin((x + \alpha) + \alpha) = \sin(x + \alpha) \cos \alpha + \cos(x + \alpha) \sin \alpha$, $\sin x = \sin((x + \alpha) - \alpha) = \sin(x + \alpha) \cos \alpha - \cos(x + \alpha) \sin \alpha$, was zu $\sin(x + 2\alpha) - \sin x = 2 \cos(x + \alpha) \sin \alpha$ führt

ergibt — der zuletzt angeschriebene Summand 0 spiegelt die Tatsache wieder, daß $f(x)$ ein Polynom vom Grad $2n$ darstellt, folglich die $(2n+2)$-te Ableitung verschwindet. Also gilt einerseits

$$F(x) + F''(x) = f(x)$$

und andererseits müssen aufgrund der zu Beginn durchgeführten Erläuterungen $F(0)$ und $F(\pi)$ *ganze Zahlen* sein (denn $F(0)$ und $F(\pi)$ ergeben sich aus Summen und Differenzen ganzer Zahlen). Die Differentiation

$$(F'(x)\sin x - F(x)\cos x)' = F''(x)\sin x + F(x)\sin x =$$

(die beiden anderen aus der Produktregel auftretenden Summanden $F'(x)\cos x$ und $-F'(x)\cos x$ heben einander offensichtlich auf)

$$= (F(x) + F''(x))\sin x = f(x)\sin x$$

belegt somit:

$$\int_0^\pi f(x)\sin x \cdot \mathrm{d}x = [F'(x)\sin x - F(x)\cos x]_0^\pi = F(\pi) + F(0) \ .$$

1.5. **Schluß des Beweises: ein Widerspruch.** Wir fassen alles Bisherige zusammen: Geht man von zwei positiven ganzen Zahlen a und b mit $\pi = a/b$ aus, wäre — unabhängig davon, wie groß man die ganze Zahl $n > 0$ wählt — das Integral

$$I_n = \int_0^\pi \frac{b^n x^n (\pi - x)^n}{n!} \sin x \cdot \mathrm{d}x$$

stets eine ganze Zahl. Nun ist aber, weil $x(\pi - x)$ für $0 < x < \pi$ an der Stelle $x = \pi/2$ sein Maximum $\pi^2/4$ einnimmt und sonst, genauso wie der durch 1 nach oben beschränkte Sinus, stets positiv bleibt, für $0 < x < \pi$

$$0 < \frac{b^n x^n (\pi - x)^n}{n!} \sin x \le \frac{b^n \pi^{2n}}{4^n \cdot n!} = \frac{1}{n!}\left(\frac{a\pi}{4}\right)^n \ .$$

Weil die Reihe

$$\sum_{n=0}^\infty \frac{1}{n!}\left(\frac{a\pi}{4}\right)^n = \mathrm{e}^{a\pi/4}$$

konvergiert, muß

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n!}\left(\frac{a\pi}{4}\right)^n = 0$$

zutreffen[2]. Folglich kann man die natürliche Zahl n so groß voraussetzen, daß

$$\frac{1}{n!}\left(\frac{a\pi}{4}\right)^n < \frac{1}{\pi}$$

[2]Man kann auch elementarer argumentieren: Für jede positive Konstante q konvergiert $q^n/n!$ nach 0. Denn wenn die natürliche Zahl $j \ge q$ ist, kann man bei $n \ge 2j$ wegen

$$\frac{q^n}{n!} = \left(\frac{q^j}{j!}\right)\left(\frac{q^j}{(j+1)(j+2)\cdot\ldots\cdot 2j}\right)\left(\frac{q^{n-2j}}{(2j+1)(2j+2)\cdot\ldots\cdot n}\right)$$

den Quotienten $q^n/n!$ in drei Faktoren aufteilen: der erste ist eine von n unabhängige Konstante, der zweite ist durch 1 beschränkt und der dritte konvergiert schneller als $(1/2)^{n-2j}$ nach Null.

stimmt. Dadurch würde man aber

$$0 < \int_0^\pi \frac{b^n x^n (\pi - x)^n}{n!} \sin x \cdot dx \le \int_0^\pi \frac{1}{n!} \left(\frac{a\pi}{4}\right)^n \cdot dx = \frac{1}{n!} \left(\frac{a\pi}{4}\right)^n \cdot \pi < 1 ,$$

also $0 < I_n < 1$ erzwingen, und dies ist für eine *ganze* Zahl I_n ausgeschlossen.

Folglich kann π nicht rational sein.

2. Was bedeuten Irrationalitätsbeweise?

2.1. **Eine Vorbemerkung.** Der 1767 von Johann Heinrich Lambert erstmals ersonnene Irrationalitätsbeweis für π war weitaus komplizierter als der vorliegende, und selbst nachfolgende „Vereinfachungen" blieben immer noch verwickelter als der hier erst vor weniger als 50 Jahren von Ivan Niven erdachte Beweis[3]. Aber dennoch geht in dem rechentechnischen und gedanklichen Aufwand dieses „einfachen" Beweises fast unter, welch fundamentale Erkenntnis mit der Einsicht der Irrationalität einer gegebenen Größe mitgeteilt wird.

Um dies entsprechend würdigen zu können, ist es nötig, sich über *rationale Zahlen* Klarheit zu verschaffen: Wie kommt man zu diesem Begriff und wie kann man ihn möglichst konzise fassen?

Eigentlich sind rationale Zahlen nichts anderes als verkappte natürliche Zahlen: es handelt sich um Brüche p/q mit einem ganzzahligen Zähler p und einem positiven ganzzahligen Nenner q. Und auch die ganzen Zahlen p kann man als verkappte natürliche Zahlen verstehen: als angeschriebene Differenzen $p = n - m$ mit zwei natürlichen Zahlen n und m als Minuend und Subtrahend: je nachdem, ob $n > m$, ob $n < m$, oder ob $n = m$ ist schreibt man $p = k$ mit $k = n - m$ (dies ist wegen $n > m$ nun wirklich eine natürliche Zahl), oder $p = -l$ mit $l = m - n$ (auch dies ist wegen $n < m$ nun wirklich eine natürliche Zahl), oder aber $p = 0$. So gesehen sind rationale Zahlen *unmittelbar aus dem Zählprozeß* gewonnene Objekte, gleichsam angeschriebene arithmetische Operationen, die sich stets nach endlich vielen Schritten auf die Grundzahlen 1, 2, 3, ... zurückführen lassen.

So sahen die Pythagoräer die rationalen Zahlen und so begreifen auch wir sie, wenn wir die modernen Rechenmaschinen mit Zahlen füttern. Über diesen Zahlbegriff geht nämlich die Rechenmaschine, wie raffiniert sie auch gebaut sein möge, nie hinaus: alles „Digitalisierte" ist letztlich auf die Grundzahlen beziehungsweise, wenn man nicht ganz bis zu den Wurzeln rekurrieren möchte, auf die rationalen Zahlen reduzierbar. Wenn die Zivilisation des 21. Jahrhunderts in fast religiöser Euphorie nur das als „wirklich" zur Kenntnis nehmen möchte, was digitalisierbar ist, verkündet sie das uns von Pythagoras überlieferte Dogma aufs Neue: „Alles ist Zahl".

Somit ist die Entdeckung irrationaler Größen *die* Erschütterung des Glaubens an die Digitalisierbarkeit der Welt. Und es ist wert, dieser Entdeckung in allen Einzelheiten nachzuspüren, um das Maß der Glaubenskrise ermessen zu können —

[3]Niven hat seinen Beweis offensichtlich aus dem sehr komplizierten Beweis der „Transzendenz" der „Kreiszahl" π entnommen: Carl Louis Ferdinand von Lindemann bewies 1882 in Anlehnung an Überlegungen von Charles Hermite, daß für kein Polynom $p(x)$ mit ganzzahligen Koeffizienten $p(\pi) = 0$ zutreffen kann. Wenn man sich auf Polynome $p(x) = a - bx$ ersten Grades beschränkt, erhält man als unmittelbare Folgerung die Irrationalität von π. Nivens Idee bestand nun darin, alles aus dem Transzendenzbeweis von π zu eliminieren, was für Polynome ersten Grades unerheblich ist.

einer Krise, die in dem oben gebrachten Irrationalitätsbeweis von π im Wirrwarr der Einzelargumente übertüncht wird.

Zu diesem Zweck bemühen wir uns, alle rationalen Zahlen der Reihe nach kennenzulernen:

2.2. **Die Fareyzeilen.** Es genügt, wenn wir uns auf die rationalen Zahlen zwischen 0 und 1 beschränken; alle anderen werden ja durch Additionen von ganzen Zahlen erhalten.

Es werden die rationalen Zahlen zwischen 0 und 1 nach einer vom Geologen John Farey 1816 ersonnenen Devise der Reihe nach in Zeilen, den sogenannten *Fareyzeilen,* aufgelistet: In der ersten Fareyzeile stehen die Zahlen 0/1 und 1/1. Aus der $(n-1)$-ten Fareyzeile erhält man die n-te Fareyzeile nach folgender Regel: man schreibt zunächst die $(n-1)$-te Fareyzeile ab. Sodann setzt man zwischen die aufeinanderfolgenden Brüche a/b und a'/b' deren sogenannten *Median* $(a+a')\,/\,(b+b')$ (also den Bruch mit der Summe der Zähler im Zähler und der Summe der Nenner im Nenner), falls $b+b' \leq n$ zutrifft. Es ist zum Beispiel $1+1 \leq 2$. Daher setzen wir in die zweite Zeile den Bruch $(0+1)\,/\,(1+1)$ zwischen 0/1 und 1/1. In der zweiten Zeile sind also die Zahlen 0/1, 1/2, 1/1. Die dritte Zeile lautet: 0/1, 1/3, 1/2, 2/3, 1/1. Um die vierte Zeile zu erhalten, setzen wir noch die Brüche $(0+1)\,/\,(1+3) = 1/4$ und $(2+1)\,/\,(3+1) = 3/4$, nicht aber $(1+1)\,/\,(3+2)$ und $(1+2)\,/\,(2+3)$ dazwischen. Die ersten fünf Fareyzeilen lauten dementsprechend:

$$\begin{array}{ccccccccccc}
\frac{0}{1} & & & & & & & & & & \frac{1}{1} \\
\frac{0}{1} & & & & & \frac{1}{2} & & & & & \frac{1}{1} \\
\frac{0}{1} & & & \frac{1}{3} & & \frac{1}{2} & & \frac{2}{3} & & & \frac{1}{1} \\
\frac{0}{1} & & \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & & \frac{1}{2} & & \frac{2}{3} & \frac{3}{4} & & \frac{1}{1} \\
\frac{0}{1} & \frac{1}{5} & \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & \frac{2}{5} & \frac{1}{2} & \frac{3}{5} & \frac{2}{3} & \frac{3}{4} & \frac{4}{5} & \frac{1}{1}
\end{array}$$

Eine wichtige Eigenschaft der Brüche in den Fareyzeilen besagt:

Sind a/b und a'/b' aufeinanderfolgende Brüche in der n-ten Zeile, dann ist $a'b - ab' = 1$.

In der Tat stimmt dies für $n = 1$. Wenn diese Eigenschaft schon bis zur $(n-1)$-ten Zeile bestätigt ist und a/b, a'/b' aufeinanderfolgende Brüche der $(n-1)$-ten Zeile sind, also sicher $a'b - ab' = 1$ zutrifft, dann bleiben sie im Fall $b + b' > n$ auch in der n-ten Zeile aufeinanderfolgende Brüche und die Relation bleibt genauso richtig. Hingegen sind im Fall $b + b' \leq n$ in der n-ten Zeile a/b, $(a+a')\,/\,(b+b')$ und a'/b' aufeinanderfolgende Brüche. Aber dann bleibt wegen

$$(a+a')\,b - a\,(b+b') = a'b - ab' = 1$$

und

$$a'\,(b+b') - (a+a')\,b' = a'b - ab' = 1$$

die Aussage ebenfalls für die n-te Zeile richtig.

Zwei Folgerungen kann man hieraus unmittelbar ziehen:

Alle Brüche in den Fareyzeilen sind gekürzt.

Denn ein gemeinsamer Teiler von a und b muß wegen $a'b - ab' = 1$ auch Teiler von 1 sein, also kommt nur 1 als größter gemeinsamer Teiler von Zähler und Nenner des Bruchs a/b in der Fareyzeile in Frage.

Die Brüche in den Fareyzeilen sind der Größe nach geordnet.

Denn wenn a/b, a'/b' aufeinanderfolgende Brüche in der n-ten Fareyzeile sind, lautet ihre Differenz

$$\frac{a'}{b'} - \frac{a}{b} = \frac{a'b - ab'}{bb'} = \frac{1}{bb'} > 0 ,$$

was $a/b < a'/b'$ beweist.

2.3. **Alle Brüche sind Fareybrüche.** Als nächstes behaupten wir: *Sind a/b und a'/b' aufeinanderfolgende Brüche einer Fareyzeile, ist der Median $(a + a') / (b + b')$ jener eindeutig bestimmte Bruch, dessen Wert zwischen den beiden gegebenen Brüchen liegt, der den kleinstmöglichen Nenner besitzt.*

Einerseits wissen wir nämlich, daß der genannte Median zum ersten Mal in der $(b + b')$-ten Fareyzeile auftreten wird und in der Tat

$$\frac{a}{b} < \frac{a + a'}{b + b'} < \frac{a'}{b'}$$

zutrifft. Bezeichnet andererseits p/q einen zwischen a/b und a'/b' liegenden Bruch, bedeutet dies:

$$\frac{a'}{b'} - \frac{a}{b} = \left(\frac{a'}{b'} - \frac{p}{q}\right) - \left(\frac{p}{q} - \frac{a}{b}\right) = \frac{a'q - b'p}{b'q} + \frac{bp - aq}{bq} \geq \frac{1}{b'q} + \frac{1}{bq} = \frac{b + b'}{bb'q} .$$

Die daraus folgende Ungleichung

$$\frac{b + b'}{bb'q} \leq \frac{a'b - ab'}{bb'} = \frac{1}{bb'}$$

belegt $q \geq b + b'$. Darum kann bei $q > b + b'$ der Bruch p/q nicht jener Bruch zwischen a/b und a'/b' mit kleinstmöglichem Nenner sein. Ist hingegen $q = b + b'$, erzwingt dies in den beiden obigen Ungleichungen, das $\leq$-Zeichen bzw. $\geq$-Zeichen durch das Gleichheitszeichen zu ersetzen, woraus insbesondere

$$a'q - b'p = 1 \quad \text{und} \quad bp - aq = 1$$

folgen. Die erste Gleichung mit a, die zweite Gleichung mit a' multipliziert und danach die Summe gebildet, liefert

$$-ab'p + a'bp = a + a' \quad \text{also} \quad (a'b - ab')\,p = a + a',$$

was neben $q = b + b'$ auch $p = a + a'$ beweist. Daher ist in der Tat p/q der Median zwischen a/b und a'/b'.

Damit ist man im wesentlichen bereits zur folgenden Einsicht gelangt: *Wenn p, q teilerfremde ganze Zahlen mit $0 \leq p \leq q$ sind, dann tritt p/q in der q-ten und in allen darauffolgenden Fareyzeilen auf.*

Für $q = 1$ ist dies klar. Angenommen, es ist bei einem $q > 1$ bereits für $q - 1$ als richtig erkannt. Dann kann p/q definitionsgemäß nicht in der $(q - 1)$-ten Zeile auftauchen, also muß sich p/q dem Wert nach zwischen zwei aufeinanderfolgenden Brüchen a/b und a'/b' der $(q - 1)$-ten Zeile befinden:

$$\frac{a}{b} < \frac{p}{q} < \frac{a'}{b'} .$$

Auch der Median $(a + a') / (b + b')$ befindet sich seinem Wert nach zwischen a/b und a'/b' und kommt in der $(q - 1)$-ten Zeile noch nicht vor, denn sonst wären a/b

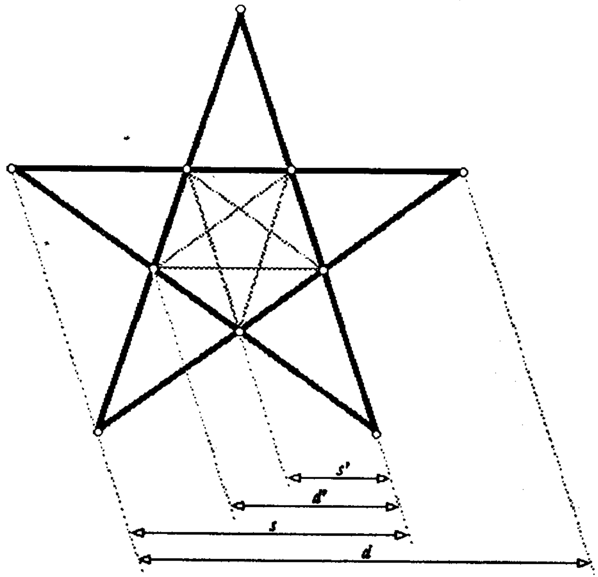

ABBILDUNG 1

und a'/b' in dieser nicht aufeinanderfolgend. Demgemäß ist $b + b' > q - 1$, das heißt $b + b' \geq q$. Die oben gerade bewiesene Minimaleigenschaft des nächsten in den Fareyzeilen zwischen a/b und a'/b' auftauchenden Bruchs p/q besagt jedoch umgekehrt $q \geq b + b'$, was $q = b + b'$ zur Folge hat. Da p/q durch diese Minimaleigenschaft eindeutig bestimmt ist, handelt es sich bei p/q notwendig um den Median $(a + a') \,/\, (b + b')$. Also tritt dieser in der q-ten und in allen darauffolgenden Fareyzeilen auf. Mit anderen Worten:

Die n-te Fareyzeile besteht aus allen gekürzten Brüchen a/b mit $0 \leq a/b \leq 1$ und $1 \leq b \leq n$. Die Brüche sind der Größe nach geordnet.

2.4. **Die „erste“ irrationale Größe.** Nun betrachten wir das von den Pythagoräern als geheimnisumwittertes Symbol verehrte Pentagramm, jene Figur, die sich aus dem Ziehen der Diagonalen des regelmäßigen Fünfecks ergibt. Das Verhältnis der Seitenlänge s zur Diagonalenlänge d des regelmäßigen Fünfecks wird — spätestens seit Johannes Kepler — der „goldene Schnitt“, die „sectio aurea“ $\varphi = s/d$ genannt[4]. Die Diagonalen bilden mit ihren Schnittpunkten ein kleineres regelmäßiges Fünfeck, dessen Seitenlänge s' und dessen Diagonalenlänge d' heißen sollen. Deren Quotient liefert ebenfalls den goldenen Schnitt:

$$\varphi = \frac{s}{d} = \frac{s'}{d'} \,.$$

Es gilt selbstverständlich

$$\frac{d'}{d} = \frac{s'}{s} \,,$$

[4] Tatsächlich nennt man meistens das reziproke Verhältnis $1/\varphi$ den goldenen Schnitt; der Unterschied spielt wegen der Tatsache, daß — wie gleich gezeigt wird — die Differenz zwischen diesen beiden genau 1 beträgt, kaum eine Rolle.

denn dieser Quotient nennt das Größenverhältnis der beiden Pentagramme zueinander. Die Symmetrie der Figur belegt unmittelbar, daß

$$d = s + d' \quad \text{und} \quad s = d' + s'$$

zutrifft. Daraus folgt, daß

$$\varphi = \frac{s}{d} = \frac{d-d'}{d} = 1 - \frac{d'}{d} = 1 - \frac{s'}{s} = \frac{s-s'}{s} = \frac{d'}{s}$$

gilt. Darum stehen die vier, der Größe nach angeordneten, im Pentagramm vorkommenden Längen s', d', s, d der Reihe nach im stets gleichen Verhältnis des goldenen Schnitts:

$$\varphi = \frac{s'}{d'} = \frac{d'}{s} = \frac{s}{d}\,.$$

Vor allem die Rechnung

$$\varphi = \frac{s}{d} = \frac{1}{\frac{d}{s}} = \frac{1}{\frac{s+d'}{s}} = \frac{1}{1+\frac{d'}{s}} = \frac{1}{1+\varphi}$$

ist bemerkenswert. Denn mit ihr werden wir φ als irrational entlarven:

Bezeichnen $p_0/q_0 = 0/1$, also $p_0 = 0$ und $q_0 = 1$, und für $k = 1, 2, 3, \ldots$

$$\frac{p_k}{q_k} = \frac{1}{1+\frac{p_{k-1}}{q_{k-1}}} = \frac{q_{k-1}}{q_{k-1}+p_{k-1}}\,, \text{ also } p_k = q_{k-1} \text{ und } q_k = q_{k-1} + p_{k-1}\,,$$

erhält man einerseits $p_1/q_1 = 1/1$ und andererseits für $k = 1, 2, 3, \ldots$ die Formel

$$\frac{p_{k+1}}{q_{k+1}} = \frac{1}{1+\frac{p_k}{q_k}} = \frac{q_k}{q_k+p_k} = \frac{p_k+p_{k-1}}{q_k+q_{k-1}}\,.$$

Sie besagt, daß der Bruch p_{k+1}/q_{k+1} immer der Median zwischen den beiden vorangegangenen Brüchen p_k/q_k und p_{k-1}/q_{k-1} ist. Mit anderen Worten: die Folge der Brüche

$$\frac{p_0}{q_0} = \frac{0}{1}\,,\quad \frac{p_1}{q_1} = \frac{1}{1}\,,\quad \frac{p_2}{q_2} = \frac{1}{2}\,,\quad \frac{p_3}{q_3} = \frac{2}{3}\,,\quad \frac{p_4}{q_4} = \frac{3}{5}\,,\quad \frac{p_5}{q_5} = \frac{5}{8}\,,\quad \ldots$$

beschreibt in den untereinandergeschriebenen Fareyzeilen eine Zick-Zack-Linie von immer zwischen den beiden Vorgängern neu ermittelten Medianen. Die mit geraden Indizes versehenen Brüche bilden eine streng monoton wachsende Folge

$$\frac{p_0}{q_0} = \frac{0}{1} < \frac{p_2}{q_2} = \frac{1}{2} < \frac{p_4}{q_4} = \frac{3}{5} < \frac{p_6}{q_6} = \frac{8}{13} < \frac{p_8}{q_8} = \frac{21}{34} < \ldots\,,$$

die mit ungeraden Indizes versehenen Brüche bilden eine streng monoton fallende Folge

$$\frac{p_1}{q_1} = \frac{1}{1} > \frac{p_3}{q_3} = \frac{2}{3} > \frac{p_5}{q_5} = \frac{5}{8} > \frac{p_7}{q_7} = \frac{13}{21} > \frac{p_9}{q_9} = \frac{34}{55} > \ldots$$

und es gilt stets $p_{2j+1}/q_{2j+1} > p_{2i}/q_{2i}$.

Weil $\varphi > 0 = p_0/q_0$ ist, erhalten wir wegen

$$\frac{p_{k+1}}{q_{k+1}} = \frac{1}{1+\frac{p_k}{q_k}} \quad \text{und} \quad \varphi = \frac{1}{1+\varphi}$$

der Reihe nach[5]

$$\varphi < \frac{p_1}{q_1}\,,\quad \varphi > \frac{p_2}{q_2}\,,\quad \varphi < \frac{p_3}{q_3}\,,\quad \varphi > \frac{p_4}{q_4}\,,\quad \varphi < \frac{p_5}{q_5}\,,\quad \varphi > \frac{p_6}{q_6}\,,\quad \ldots$$

Es liegt daher für alle $k = 0, 1, 2, \ldots$ der goldene Schnitt immer zwischen den beiden Brüchen p_k/q_k und p_{k+1}/q_{k+1}. Nie jedoch kann φ mit einem dieser Brüche exakt übereinstimmen — und andere rationale Zahlen als die in den Fareyzeilen angeschriebenen gibt es nicht. *Folglich ist φ mit Sicherheit nicht rational.*

2.5. **Ein Absturz in das Bodenlose.** Der hier vorgeführte Beweis der Irrationalität von φ ist bei weitem nicht der kürzeste. Aber er macht am intensivsten klar, was diese Erkenntnis in sich birgt: Um die Größe φ fassen zu können, müßte man die bei $0/1$ und $1/1$ beginnende Zick-Zack-Linie der zwischen den beiden jeweiligen Vorgängern ermittelten Mediane immer weiter und weiter verfolgen — und dieser schaurige „Absturz in die Tiefe" der untereinander aufgelisteten Fareyzeilen *fände kein Ende.* Er entpuppt sich als Fallen ins buchstäbliche Nichts. Die verstörenden Parabeln Kafkas wie jene von der kaiserlichen Botschaft, die trotz des dringenden kaiserlichen Auftrags, trotz aller übermenschlichen Anstrengungen des Boten ihren Adressaten nie, nie erreicht, die in wunderbare Worte gefaßte Schilderung Musils, wie das quälende Erlebnis, in das Unendliche unaufhaltsam einzudringen, den hochsensiblen jungen Törleß zum blanken Entsetzen treibt — all dies schildert in dichterische Worte gefaßt die intellektuelle Bestürzung, irrationalen Größen ausgeliefert zu sein.

Diese Bestürzung kulminiert schließlich darin, daß wir von einer irrationalen Größe wie φ zwar wissen, was sie *nicht* ist, nämlich nicht rational, daß die Arithmetik aber keinerlei Hinweis darauf gibt, *was* sie sein könnte. Wir haben also eine Eigenschaft — die Irrationalität — von „etwas" — dem goldenen Schnitt φ — festgestellt, wobei gar nicht klar ist, *worum* es sich bei diesem „etwas" überhaupt handelt! Wer gestattet uns, wenn wir von φ nur wissen, was es *nicht* ist, Ungleichungen wie $\varphi > 0$ oder

$$\frac{p_{2k}}{q_{2k}} < \varphi < \frac{p_{2k+1}}{q_{2k+1}} \qquad \text{für } k = 0, 1, 2, \ldots$$

anzuschreiben? Diese vernichtende Kritik, die bekanntlich Arthur Schopenhauer den Mathematikern vorwarf[6], scheint im nachhinein die ganze Beweisführung der Irrationalität von φ ad absurdum zu führen.

Wir werden erst ganz am Ende darauf zurückkommen. Vorerst bemühen wir uns darum, „Wege entlang der Fareyzeilen hinab" zu beschreiben — mögen sie bei irgendeinem Bruch anhalten oder endlos weiter führen: Wenn a/b und a'/b' benachbarte Brüche einer Fareyzeile sind, erweisen sich die Brüche

$$\frac{a + a'}{b + b'}\,,\quad \frac{2a + a'}{2b + b'}\,,\quad \frac{3a + a'}{3b + b'}\,,\quad \ldots\,,\quad \frac{ka + a'}{kb + b'}\,,\quad \ldots$$

[5]Dies ergibt sich aus der folgenden, fast trivialen Aussage: *Bezeichnen a eine positive (ganze) Zahl, x, y positive Größen und sind*

$$u = \frac{1}{a + x}\,,\quad v = \frac{1}{a + y}\,,$$

dann besagt $x < y$ das gleiche wie $u > v$ und es besagt $x > y$ das gleiche wie $u < v$.

[6]Vermutlich haben bereits die aus der pythagoräischen und eleatischen Schule stammenden Sophisten wie zum Beispiel Zenon ähnlich argumentiert. Die Paradoxa vom „fliegenden Pfeil, der immer ruht" oder von „Achill, der eine Schildkröte nicht einzuholen vermag" deuten jedenfalls auf ähnliche Gedankengänge hin.

als der erste, zweite, dritte, ..., k-te, ... Median unter den zwischen a/b und a'/b' in den nachfolgenden Fareyzeilen befindlichen Medianen, die immer unmittelbar auf a/b folgen, und es erweisen sich die Brüche

$$\frac{a+a'}{b+b'}\,,\quad \frac{a+2a'}{b+2b'}\,,\quad \frac{a+3a'}{b+3b'}\,,\quad \ldots\,,\quad \frac{a+ka'}{b+kb'}\,,\quad \ldots$$

als der erste, zweite, dritte, ..., k-te, ... Median unter den zwischen a/b und a'/b' in den nachfolgenden Fareyzeilen befindlichen Medianen, die immer unmittelbar vor a'/b' auftreten.

Ein „Weg" $[0; a_1, a_2, \ldots, a_k, \ldots]$ „entlang der Fareyzeilen hinab[7]" besteht aus der Angabe von positiven ganzen Zahlen a_1, a_2, ..., a_k, ...: Der „Weg" beginnt bei $p_0/q_0 = 0/1$. Danach ist $p_1/q_1 = [0; a_1]$ der a_1-te Median unter den in den nachfolgenden Fareyzeilen befindlichen Medianen, der unmittelbar bei $0/1$ benachbart ist (wobei $1/1$ als erster dieser Brüche in der ersten Fareyzeile mitgezählt wird). Angenommen, wir sind bereits bis zu

$$\frac{p_{k-1}}{q_{k-1}} = [0; a_1, \ldots, a_{k-1}]\ , \quad \frac{p_k}{q_k} = [0; a_1, \ldots, a_{k-1}, a_k]$$

gelangt. Dann ist

$$\frac{p_{k+1}}{q_{k+1}} = [0; a_1, \ldots, a_{k-1}, a_k, a_{k+1}] = \frac{a_{k+1}p_k + p_{k-1}}{a_{k+1}q_k + q_{k-1}}$$

der a_{k+1}-te Median unter den in den nachfolgenden Fareyzeilen zwischen p_{k-1}/q_{k-1} und p_k/q_k befindliche Medianen, der unmittelbar bei p_k/q_k beachbart ist.

Wenn die Folge der positiven ganzen Zahlen a_1, a_2, ..., a_k, ... bei a_n abbricht, dann landet der „Weg" bei der rationalen Zahl

$$\frac{p_n}{q_n} = [0; a_1, \ldots, a_k, \ldots, a_n]\ ,$$

die wir der Einfachheit halber mit diesem Weg gleichsetzen. Wenn jedoch die Folge der positiven ganzen Zahlen a_1, a_2, ..., a_k, ... nie abbricht, dann verliert sich der „Weg entlang der Fareyzeilen hinab" in den bodenlosen Abgrund, wie wir es, im einfachsten Beispiel, beim goldenen Schnitt

$$\varphi = [0; 1, 1, 1, \ldots, 1, \ldots]$$

gerade erlebten.

3. Das Einfache und das Schwierige der Irrationalität

3.1. Die Irrationalität bestimmter Wurzeln. Ein ganz ähnliches Beispiel wie das des goldenen Schnitts erhält man folgendermaßen: Es bezeichnen $p_0/q_0 = 0/1$,

[7] Mathematiker nennen einen derartigen Weg einen „Kettenbruch" und definieren für ein beliebiges ganzzahliges a_0

$$[a_0; a_1, a_2, \ldots, a_k, \ldots] = a_0 + [0; a_1, a_2, \ldots, a_k, \ldots]\ .$$

Der Name „Kettenbruch" gründet auf der Beziehung

$$[a_0; a_1, a_2, \ldots, a_k, \ldots] = a_0 + \frac{1}{[a_1; a_2, \ldots, a_k, \ldots]}\ ,$$

die man beim erhaltenen Nenner noch einmal ins Spiel bringen kann und auf diese Weise eine Kaskade ineinandergeschachtelter Brüche erhält.

also $p_0 = 0$ und $q_0 = 1$, und für $k = 1,2,3,\ldots$

$$\frac{p_k}{q_k} = \frac{1}{2+\dfrac{p_{k-1}}{q_{k-1}}} = \frac{q_{k-1}}{2q_{k-1}+p_{k-1}}\ , \text{ also } p_k = q_{k-1} \text{ und } q_k = 2q_{k-1}+p_{k-1}\ .$$

So bekommt man einerseits $p_1/q_1 = 1/2$ und andererseits für $k = 1,2,3,\ldots$ die Formel

$$\frac{p_{k+1}}{q_{k+1}} = \frac{1}{2+\dfrac{p_k}{q_k}} = \frac{q_k}{2q_k+p_k} = \frac{2p_k+p_{k-1}}{2q_k+q_{k-1}}\ .$$

Sie besagt, daß der Bruch p_{k+1}/q_{k+1} immer der zweite Median unter den in den nachfolgenden Fareyzeilen zwischen p_{k-1}/q_{k-1} und p_k/q_k befindlichen Medianen ist, der unmittelbar an p_k/q_k anschließt. Mit anderen Worten:

$$\frac{p_1}{q_1} = [0;2] = \frac{1}{2}\ ,\quad \frac{p_2}{q_2} = [0;2,2] = \frac{2}{5}\ ,\quad \ldots\ ,\quad \frac{p_k}{q_k} = [0;2,2,\ldots,2]\ .$$

Weil die positive Größe $\psi = \sqrt{2}-1$ die Eigenschaft

$$\psi = \sqrt{2}-1 = \frac{1}{\dfrac{1}{\sqrt{2}-1}} = \frac{1}{\dfrac{\sqrt{2}+1}{2-1}} = \frac{1}{2+(\sqrt{2}-1)} = \frac{1}{2+\psi}$$

besitzt, erhalten wir wegen $\psi > 0 = p_0/q_0$ sowie wegen

$$\frac{p_{k+1}}{q_{k+1}} = \frac{1}{2+\dfrac{p_k}{q_k}} \quad \text{und} \quad \psi = \frac{1}{2+\psi}$$

der Reihe nach

$$\psi < \frac{p_1}{q_1}\ ,\quad \psi > \frac{p_2}{q_2}\ ,\quad \psi < \frac{p_3}{q_3}\ ,\quad \psi > \frac{p_4}{q_4}\ ,\quad \psi < \frac{p_5}{q_5}\ ,\quad \psi > \frac{p_6}{q_6}\ ,\quad \ldots$$

Es liegt daher für alle $k = 0,1,2,\ldots$ die Größe $\psi = \sqrt{2}-1$ immer zwischen den beiden Brüchen p_k/q_k und p_{k+1}/q_{k+1}. Nie jedoch kann sie mit einem dieser Brüche exakt übereinstimmen — und andere rationale Zahlen als die in den Fareyzeilen angeschriebenen gibt es nicht. *Folglich sind ψ und daher auch $\sqrt{2}$ mit Sicherheit nicht rational.*

Es ist klar, wie man dieses Beispiel verallgemeinern kann: Man ermittelt bei einer beliebig vorgegebenen positiven ganzen Zahl m die *positive* Größe ψ aus der Gleichung

$$\psi = \frac{1}{2m+\psi}\ ,$$

also aus der quadratischen Gleichung $\psi^2 + 2m\psi - 1 = 0$ als

$$\psi = \sqrt{m^2+1} - m$$

und geht nun ganz analog wie im obigen Spezialfall für $m = 1$ vor: Es bezeichnen $p_0/q_0 = 0/1$, also $p_0 = 0$ und $q_0 = 1$, und für $k = 1,2,3,\ldots$

$$\frac{p_k}{q_k} = \frac{1}{2m+\dfrac{p_{k-1}}{q_{k-1}}} = \frac{q_{k-1}}{2mq_{k-1}+p_{k-1}}\ , \text{ also } p_k = q_{k-1} \text{ und } q_k = 2mq_{k-1}+p_{k-1}\ .$$

So bekommt man einerseits $p_1/q_1 = 1/2m$ und andererseits für $k = 1,2,3,\dots$ die Formel

$$\frac{p_{k+1}}{q_{k+1}} = \frac{1}{2m + \frac{p_k}{q_k}} = \frac{q_k}{2mq_k + p_k} = \frac{2mp_k + p_{k-1}}{2mq_k + q_{k-1}} .$$

Sie besagt, daß der Bruch p_{k+1}/q_{k+1} immer der $2m$-te Median unter den in den nachfolgenden Fareyzeilen zwischen p_{k-1}/q_{k-1} und p_k/q_k befindlichen Medianen ist, der unmittelbar an p_k/q_k anschließt. Mit anderen Worten:

$$\frac{p_1}{q_1} = [0; 2m] = \frac{1}{2m} , \quad \frac{p_2}{q_2} = [0; 2m, 2m] , \quad \dots , \quad \frac{p_k}{q_k} = [0; 2m, 2m, \dots, 2m] .$$

Wegen $\psi > 0 = p_0/q_0$ sowie wegen

$$\frac{p_{k+1}}{q_{k+1}} = \frac{1}{2 + \frac{p_k}{q_k}} \quad \text{und} \quad \psi = \frac{1}{2+\psi}$$

erhalten wir der Reihe nach

$$\psi < \frac{p_1}{q_1} , \quad \psi > \frac{p_2}{q_2} , \quad \psi < \frac{p_3}{q_3} , \quad \psi > \frac{p_4}{q_4} , \quad \psi < \frac{p_5}{q_5} , \quad \psi > \frac{p_6}{q_6} , \quad \dots$$

Es liegt daher für alle $k = 0,1,2,\dots$ die Größe $\psi = \sqrt{m^2+1} - m$ immer zwischen den beiden Brüchen p_k/q_k und p_{k+1}/q_{k+1}. Nie jedoch kann sie mit einem dieser Brüche exakt übereinstimmen — und andere rationale Zahlen als die in den Fareyzeilen angeschriebenen gibt es nicht. *Folglich sind ψ und daher auch $\sqrt{m^2+1}$ mit Sicherheit nicht rational.*

Somit sind mit einem Schlag die Irrationalitäten von

$$\sqrt{2}, \quad \sqrt{5}, \quad \sqrt{10}, \quad \sqrt{17}, \quad \sqrt{26}, \quad \sqrt{37}, \quad \dots$$

hergeleitet[8].

3.2. **Einfachere Irrationalitätsbeweise von $\sqrt{2}$.** Von Aristoteles wird überliefert, daß er einen viel einfacheren Beweis der Irrationalität von $\sqrt{2}$ kannte als den oben mit Fareyzeilen geführten. Es ist der scheinbar am wenigsten voraussetzende und zugleich der populärste unter allen Irrationalitätsbeweisen:

Wäre $\sqrt{2} = p/q$ ein Bruch mit positiven ganzen Zahlen p und q als Zähler und Nenner, können wir von der Annahme ausgehen, mindestens eine dieser beiden Zahlen wäre ungerade — ansonsten ließe sich der Bruch so lange durch 2 kürzen, bis man zu dieser Annahme gelangt. Weil aber wegen $2 = p^2/q^2$, also $p^2 = 2q^2$, das

[8]Diese Beweismethode kann man auf alle Wurzeln positiver ganzer Zahlen, die keine Quadratzahlen sind, verallgemeinern. Man kann den gleichen Beweis auch für die Basis e des natürlichen Logarithmus führen, wenn man weiß, daß

$$e - 2 = [0; 1, 2, 1, 1, 4, 1, 1, 6, 1, \dots, 1, 2n, 1, \dots]$$

zutrifft (was allerdings nicht auf der Hand liegt). Leichter erkennt man die Irrationalität von e direkt aus der Formel

$$e = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} ,$$

denn für alle natürlichen Zahlen k lautet die *nächstkleinere ganze* Zahl an $(k!)\,e$

$$k! \sum_{j=0}^{k} \frac{1}{j!} ,$$

sie ist demzufolge stets *kleiner* als $(k!)\,e$, was der Annahme, e wäre rational, widerspricht.

Quadrat p^2 gerade wäre, dürfte p selbst *nicht ungerade* sein — ungerade Zahlen besitzen nämlich ungerade Quadrate[9]. Also müßte p gerade und folglich von der Gestalt $p = 2r$ mit einem ganzzahligen r sein. Dann folgte aber aus $2q^2 = p^2 = 4r^2$, daß wegen $q^2 = 2r^2$ auch q *nicht ungerade* sein dürfte, was den Widerspruch zur Annahme, eine der beiden Zahlen p oder q wäre ungerade, herbeiführt.

Trotz — oder wegen — seiner Knappheit vermittelt dieser Beweis wenig Einblick dafür, welches strukturelle Moment im mathematischen Gedankengebäude tatsächlich die angenommene Rationalität von $\sqrt{2}$ verhindert. Überdies ist der aristotelische Beweis für den Anfänger gar nicht so leicht nachzuvollziehen, wie es seine Knappheit suggeriert: nicht nur die Tatsache, daß es sich bei ihm um einen indirekten Beweis handelt — wir erwähnten bereits, daß die Führung indirekter Beweise eine höchst problematische Angelegenheit darstellen kann —, noch mehr die Tatsache, daß in ihm ein weiterer indirekter Beweis verschachtelt liegt — daß nämlich ein gerades Quadrat eine gerade Wurzel besitzen muß, wird, obwohl aus philosophischer Sicht völlig unproblematisch, dennoch indirekt begründet —, tragen zur anfänglichen Verwirrung des unbedarften Laien bei.

Fast genauso knapp wie der aristotelische Beweis, aber weitaus einsichtiger und zugleich viel mehr verallgemeinerungsfähig ist der folgende Irrationalitätsbeweis von $\sqrt{2}$: Wäre $\sqrt{2} = p/q$ ein Bruch mit positiven ganzen Zahlen p und q als Zähler und Nenner, käme in der Primfaktorenzerlegung von p der Primfaktor 2 mit einer Vielfachheit m vor, d.h. 2^m teilt p, aber 2^{m+1} teilt p nicht mehr. Ebenso käme in der Primfaktorenzerlegung von q der Primfaktor 2 mit einer Vielfachheit n vor[10]. In der Primfaktorenzerlegung von p^2 käme demnach der Primfaktor 2 mit der Vielfachheit $2m$, also mit einer *geraden* Vielfachheit vor, genauso käme in der Primfaktorenzerlegung von q^2 der Primfaktor 2 mit der *geraden* Vielfachheit $2n$ vor, a fortiori käme in der Primfaktorenzerlegung von $2q^2$ der Primfaktor 2 mit der *ungeraden* Vielfachheit $2n + 1$ vor, was der Identität $p^2 = 2q^2$ widerspricht.

Es sei zugestanden, daß die Kenntnis der *Eindeutigkeit* der Zerlegung positiver ganzer Zahlen in Primfaktoren für das Verstehen dieses Beweises Voraussetzung ist. Der Gewinn, den man für diesen Preis erzielt, ist jedoch ein tieferes Verständnis dafür, warum $\sqrt{2}$ oder allgemeiner: *keine aus einer Primzahl gezogene Wurzel rational sein kann.*

3.3. **Der einfachste Irrationalitätsbeweis.** Noch einfacher als die bisher geführten Irrationalitätsbeweise ist der folgende, welcher die Irrationalität von $\sqrt{10}$ belegt. Er ist sogar so elementar, daß man nicht einmal die sonst in der Mathematik unumgängliche Formelsprache einzusetzen braucht. Der ganze Beweis beruht auf der folgenden, unmittelbar einsichtigen Feststellung: Jede Quadratzahl besitzt am Ende ihrer Zifferndarstellung entweder keine, oder aber zwei, oder aber vier, ... — jedenfalls *immer* eine *gerade* Zahl von Nullen, nämlich genau doppelt so viele Nullen wie ihre Wurzel.

Wäre $\sqrt{10}$ ein Bruch zweier ganzer Zahlen, müßte der Zähler dieses Bruches mit sich multipliziert den exakt 10-fachen Wert des mit sich selbst multiplizierten Nenners ergeben. Dann hätte aber eine dieser beiden Quadratzahlen eine gerade

[9] Dies belegt die Formel $(2n+1)^2 = 4n^2 + 4n + 1 = 2(2n^2 + 2n) + 1$.

[10] Im aristotelischen Beweis wird eine dieser Vielfachheiten m oder n als Null angenommen (eine der Zahlen p und q wäre ungerade); hier brauchen wir diese Annahme nicht, d.h. wir müssen gar nichts vom Kürzen von Brüchen wissen.

und die andere eine ungerade Zahl von Nullen am Ende der Zifferndarstellung, was — wie wir eben sahen — unmöglich stimmen kann.

Leider scheint dieses wunderbar einfache Argument nur auf $\sqrt{10}$ zugeschnitten zu sein. Aber mit ein wenig mehr an Mathematik kann man es sogar für eine Fülle weiterer Wurzeln verallgemeinern. Denn 10 besitzt in dieser Beweisführung allein die Rolle der Basis des Ziffernsystems. Geht man zum Beispiel vom binären Ziffernsystem mit 2 als Basis aus, verliert das Argument nichts von seiner Kraft[11]: Es bestätigt somit erneut $\sqrt{2}$ als irrationale Größe.

3.4. Das schwierigste Problem. Bis jetzt haben wir die Frage umgangen, worum es sich bei den Größen, deren Irrationalität mit so vielen raffinierten Überlegungen belegt wurde, eigentlich handelt.

Für Richard Dedekind, den philosophisch wohl unbekümmertsten aller Mathematiker des 19. Jahrhunderts, lag die Antwort auf der Hand; das Bild des „Wegs entlang der Fareyzeilen hinab" drängte ihm die „Lösung" des Problems förmlich auf: Eine (zwischen 0 und 1 liegende) *reelle Größe* — Dedekind sprach von einer reellen „Zahl", und dieser völlig unpassende Ausdruck hat sich seither eingebürgert, obwohl nichts Arithmetisches an ihm haftet — ist in seinen Augen einfach ein senkrechter „Schnitt", der alle Fareyzeilen in zwei Teile trennt.

Beschreibt

$$[0; a_1, a_2, \ldots, a_k, \ldots, a_n]$$

einen endlichen „Weg entlang der Fareyzeilen hinab" und endet dieser Weg exakt beim Bruch

$$\frac{p_n}{q_n} = [0; a_1, a_2, \ldots, a_k, \ldots, a_n] \ ,$$

dann ist dieser Schnitt die genau auf diesen Bruch treffende, senkrecht zu den Fareyzeilen eingetragene Trennlinie. Beschreibt hingegen

$$[0; a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots]$$

einen unendlichen „Weg entlang der Fareyzeilen hinab", denkt sich Dedekind diesen Schnitt als jene senkrecht zu den Fareyzeilen eingetragene Trennlinie, bei der alle Brüche

$$\frac{p_{2k}}{q_{2k}} = [0; a_1, a_2, \ldots, a_{2k-1}, a_{2k}] \ , \quad (k = 0, 1, 2, \ldots) \ ,$$

links und alle Brüche

$$\frac{p_{2k+1}}{q_{2k+1}} = [0; a_1, a_2, \ldots, a_{2k}, a_{2k+1}] \ , \quad (k = 0, 1, 2, \ldots) \ ,$$

rechts von ihr liegen. Mit anderen Worten: der „Weg entlang der Fareyzeilen hinab" umgarnt den geradlinigen Schnitt wie eine dieser senkrechten Geraden immer näher entlangkriechende Zick-Zack-Linie.

So augenfällig dieses anschauliche Bild des Dedekindschen Schnitts auch sein mag, so wenig hält es noch den Ansprüchen der abstrakten, von jeglicher sinnlichen Anschauung gelösten Mathematik stand. Um seine Idee des Schnittes auf eine formale Basis zu stellen, nutzte Dedekind die Mengentheorie aus, die sein ihm geistig sehr verbundener Kollege Georg Cantor schuf: Ein (zwischen 0 und 1 befindlicher)

---

[11] Das Argument behält allgemein für all jene Basen m von Ziffernsystemen Gültigkeit, bei denen die Reste $r = 1, 2, \ldots, m-1$ keine durch m teilbaren Quadrate r^2 besitzen. Denn dann bewirkt das Quadrieren einer ganzen Zahl in der Zifferndarstellung zur Basis m ein *genaues* Verdoppeln der Anzahl von Ziffern Null am Ende der ganzen Zahl. Daraus läßt sich folgern, daß $\sqrt{m}$ genau dann rational ist, wenn $\sqrt{m}$ ganzzahlig ist.

Dedekindscher Schnitt $\psi = (P \mid Q)$ ist ein Paar zweier Mengen P und Q mit den folgenden vier Eigenschaften:

1. 0 liegt in P und 1 liegt in Q.
2. Die Vereinigung von P und Q besteht aus allen rationalen Zahlen zwischen 0 und 1.
3. Der Durchschnitt von P und Q ist entweder leer, oder er besteht aus genau einer rationalen Zahl zwischen 0 und 1.
4. Mit jeder rationalen Zahl aus P ist auch jede kleinere rationale Zahl Element von P, mit jeder rationalen Zahl aus Q ist auch jede größere rationale Zahl Element von Q (wobei nur rationale Zahlen zwischen 0 und 1 in Betracht gezogen werden).

Beschreibt

$$[0; a_1, a_2, \ldots, a_k, \ldots, a_n]$$

einen endlichen „Weg entlang der Fareyzeilen hinab", besteht P aus allen rationalen Zahlen zwischen 0 und 1, die höchstens so groß wie p_n/q_n sind, und Q besteht aus allen rationalen Zahlen zwischen 0 und 1, die mindestens so groß wie p_n/q_n sind. Beschreibt hingegen

$$[0; a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots]$$

einen unendlichen „Weg entlang der Fareyzeilen hinab", liegt eine rationale Zahl, die (für ein $k = 0, 1, 2, \ldots$) in der q_{2k}-ten Fareyzeile zu liegen kommt, genau dann in P, wenn sie höchstens so groß wie

$$\frac{p_{2k}}{q_{2k}} = [0; a_1, a_2, \ldots, a_{2k-1}, a_{2k}]$$

ist, und es liegt eine rationale Zahl, die (für ein $k = 0, 1, 2, \ldots$) in der q_{2k+1}-ten Fareyzeile zu liegen kommt, genau dann in Q, wenn sie mindestens so groß wie

$$\frac{p_{2k+1}}{q_{2k+1}} = [0; a_1, a_2, \ldots, a_{2k}, a_{2k+1}]$$

ist.

Dedekind war davon überzeugt, mit dieser Festlegung irrationale Größen so exakt gefaßt zu haben wie die ganzen Zahlen — und fast alle Mathematiker teilen seine Überzeugung bis an den heutigen Tag.

3.5. **Rationalität, Irrationalität und Illusion.** Daß die von Dedekind vorgeschlagene „Lösung" jedoch gar nicht so glasklar ist, wie er selbst glaubte, zeigt sich, wenn man das zu Beginn erörterte Beispiel der „Kreiszahl" π erneut aufgreift. Mit sehr raffinierten und aufwendigen Berechnungen[12] gelang es, den $\pi - 3$ kennzeichnenden „Weg entlang der Fareyzeilen hinab" jedenfalls in den ersten Schritten zu verfolgen:

$$\pi - 3 = [0; 7, 15, 1, 292, 1, 1, 1, 2, 1, 3, 1, 14, 2, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 1, 84, 2, 1, 1, 15, 3, \ldots] .$$

[12]Ein sehr effektives Verfahren zur Berechnung von π verwendet die von John Machin ersonnene Formel

$$\pi = 16 \sum_{j=0}^{k-1} \frac{(-1)^j}{(2j+1) \cdot 5^j} - 4 \sum_{j=0}^{m-1} \frac{(-1)^j}{(2j+1) \cdot 239^j} + \vartheta_{k,m}$$

mit

$$|\vartheta_{k,m}| \leq \frac{16}{(2k+1) \cdot 5^k} + \frac{4}{(2m+1) \cdot 239^m} ,$$

die es für jede natürliche Zahl n erlaubt, π auf n exakte Nachkommastellen zu ermitteln, wenn man $k \geq 3 + (3n/2)$ und $m \geq 1 + (3n/7)$ festlegt.

Damit ist der Schnitt $\pi - 3 = (P \mid Q)$, der zugleich π festlegt, mit bewundernswerter Akribie erfaßt. Aber selbst mit der oben genannten Angabe von vielen, aber eben doch nur von *endlich* vielen Schritten dieses, wegen der Irrationalität von π mit Garantie *unendlichen* Wegs haftet an der bisher ermitteltelten Position von $\pi - 3$ eine nicht tilgbare Ungewißheit. Noch ist der Schnitt nicht messerscharf. Und niemand kann versichern, daß er je haarscharf zu führen sein wird.

Ja es ist nicht einmal sicher, ob es den „Weg entlang der Fareyzeilen hinab" für Dedekindsche Schnitte überhaupt „gibt"!

Betrachten wir, um diesen Einwand zu verstehen, nur die ersten vier Zahlen 7, 15, 1, 292, mit denen der „Weg" von $\pi - 3$ seinen Anfang nimmt: Es sind

$$[0;7] = \frac{7 \cdot 0 + 1}{7 \cdot 1 + 0} = \frac{1}{7} \qquad \text{also} \qquad \pi < 3 + \frac{1}{7} = \frac{22}{7}\,,$$

$$[0;7,15] = \frac{15 \cdot 1 + 0}{15 \cdot 7 + 1} = \frac{15}{106} \qquad \text{also} \qquad \pi > 3 + \frac{15}{106} = \frac{333}{106}\,,$$

$$[0;7,15,1] = \frac{1 \cdot 15 + 1}{1 \cdot 106 + 7} = \frac{16}{113} \qquad \text{also} \qquad \pi < 3 + \frac{16}{113} = \frac{355}{113}\,.$$

Nun ist der Bruch

$$\frac{355}{113} = 3{,}1415929203\ldots$$

bereits so nahe an

$$\pi = 3{,}1415926535\ldots\,,$$

daß man bis zum 292. Median unter den in den nachfolgenden Fareyzeilen zwischen $15/106$ und $16/113$ befindliche Medianen vordringen muß um den letzten unmittelbar vor $16/113$ liegenden zu erhalten, der sich gerade noch kleiner als $\pi - 3$ erweist. Es handelt sich dabei um den Bruch

$$[0;7,15,1,292] = \frac{292 \cdot 16 + 15}{292 \cdot 113 + 106} = \frac{4687}{33102}\,,$$

der erst in der 33102-ten Fareyzeile auftaucht!

Niemand kann garantieren, daß das „Glück", unter den *unendlich vielen* unmittelbar vor $16/113$ befindlichen Medianen doch noch einen letzten entdeckt zu haben, der sich auf der gegenüberliegenden Seite des Dedekindschen Schnittes von $\pi - 3$ befindet, immer und für alle denkbaren Dedekindschen Schnitte währt — ganz im Gegenteil: dies ist im höchsten Maße unwahrscheinlich.

Denn dieses „Glücks" gewiß zu sein, bedürfte es eines Beweises, daß *jeder* der unendlich vielen denkbaren Dedekindschen Schnitte $(P \mid Q)$ entweder *genau* auf eine rationale Zahl trifft oder aber entlang seines *unendlichen* Absturzes entlang der Fareyzeilen von jeder der *unendlich vielen* an ihn grenzenden rationalen Zahlen einen berechenbaren *positiven* Abstand besitzt — und einen solchen Beweis führen zu können, ist völlig hoffnungslos ...

Ein Dedekindscher Schnitt, eine *„reelle* Zahl", ist um nichts realer als eine Fata Morgana. Die sich auf Dedekindsche Schnitte berufende Mathematik verkommt zu einem leeren Spiel mit Illusionen. Es bedarf viel ernsthafterer Anstrengungen, um das noch schemenenhafte Konzept der irrationalen Größe auf eine tragfähige Basis zu setzen, Anstrengungen, über die zu berichten vielleicht in einem anderen Vortrag Gelegenheit sein wird.